Международная математическая олимпиада «Формула Единства» / «Третье тысячелетие» 2013/2014 год

Задачи 1 тура, 5 класс

1. Назовём год лихим, если в записи его номера есть одинаковые цифры. Например, все годы с 1988 по 2012 были лихими. Каково максимальное количество лихих лет, идущих подряд, среди уже прошедших лет нашей эры?

2. На круглом торте стоит 6 свечей. Тремя разрезами торт разрезали на части, причём в каждой части оказалась ровно одна свеча. Сколько свечей могло стоять в каждой из частей, которые образовались после первого разреза? Объясните, почему никакие другие варианты невозможны.

3. Даны три нечётных положительных числа p, q, r. Про них известно, что $p > 2q$, $q > 2r$, $r > p - 2q$. Докажите, что $p + q + r \geqslant 25$.

4. У Кости есть шесть кубиков, грани которых раскрашены в шесть разных цветов (каждая грань полностью в один цвет). Все кубики раскрашены одинаково. Костя составил из кубиков столбик и смотрит на него с четырёх сторон. Может ли он сделать это таким образом, чтобы с каждой стороны все шесть граней были разного цвета?

5. В одном доме провели перепись населения. Выяснилось, что в каждой квартире живет супружеская пара (мать и отец) и в каждой семье есть хотя бы один ребенок. У каждого мальчика в доме есть сестра, но всего мальчиков больше, чем девочек. Детей же в доме меньше, чем взрослых. Докажите, что в результаты переписи вкралась ошибка.

6. Фокусник хочет сложить колоду из 36 карт так, чтобы у любых двух подряд идущих карт совпадало либо достоинство, либо масть. При этом начать он хочет с пиковой дамы, а закончить бубновым тузом. Как это сделать?

Международная математическая олимпиада «Формула Единства» / «Третье тысячелетие» 2013/2014 год

Задачи 1 тура, 6 класс

1. Назовём год лихим, если в записи его номера есть одинаковые цифры. Например, все годы с 1988 по 2012 были лихими. Каково максимальное количество лихих лет, идущих подряд, среди уже прошедших лет нашей эры?

2. На круглом торте стоит 7 свечей. Тремя разрезами торт разрезали на части, причём в каждой части оказалась ровно одна свеча. Сколько частей было после второго разреза и сколько свечей стояло в каждой из них?

3. Даны три нечётных положительных числа p, q, r. Про них известно, что $p > 2q$, $q > 2r$, $r > p - 2q$. Докажите, что $p + q + r \geqslant 25$.

4. У Кости есть шесть кубиков, грани которых раскрашены в шесть разных цветов (каждая грань полностью в один цвет). Все кубики раскрашены одинаково. Костя составил из кубиков столбик и смотрит на него с четырёх сторон. Может ли он сделать это таким образом, чтобы с каждой стороны все шесть граней были разного цвета?

5. В одном доме провели перепись населения. Выяснилось, что в каждой квартире живет супружеская пара (мать и отец) и в каждой семье есть хотя бы один ребенок. У каждого мальчика в доме есть сестра, но всего мальчиков больше, чем девочек. Детей же в доме меньше, чем взрослых. Докажите, что в результаты переписи вкралась ошибка.

6. На продажу выставлены 20 книг по цене от 7 до 10 евро и 20 обложек по цене от 10 центов до 1 евро, причём все цены разные. Смогут ли Том и Леопольд купить по книге с обложкой, заплатив одну и ту же сумму денег?

Международная математическая олимпиада «Формула Единства» / «Третье тысячелетие» 2013/2014 год

Задачи 1 тура, 7 класс

1. В стопке лежат одинаковые карточки, на которых записаны числа от 1 до 9. Билл взял одну карточку и тайно отметил на ней 4 числа. Марк может сделать то же самое с несколькими карточками. Затем карточки открывают. Если на одной из карточек Марка хотя бы два из четырёх отмеченных чисел совпадут с числами Билла, то Марк выигрывает. Какое наименьшее число карточек должен взять Марк и как их заполнить, чтобы наверняка выиграть?

2. На круглом торте стоит 10 свечей. Четырьмя разрезами торт разрезали на части, причём в каждой части оказалась ровно одна свеча. Сколько свечей могло стоять в каждой из частей, которые образовались после первого разреза? Объясните, почему никакие другие варианты невозможны.

3. У фокусника есть два комплекта по 7 карточек. На розовых карточках записаны целые числа от 0 до 6. На первой голубой карточке написано 1, а число на каждой следующей голубой карточке в 7 раз больше предыдущего. Фокусник раскладывает карточки попарно (розовую с голубой). Затем зрители перемножают числа в каждой паре и находят сумму всех 7 произведений. Фокус состоит в том, что в сумме должно получиться простое число. Подскажите фокуснику, какие карточки можно для этого объединить в пары (или докажите, что у него ничего не получится).

4. У Кости есть шесть кубиков, грани которых раскрашены в шесть разных цветов (каждая грань полностью в один цвет). Все кубики раскрашены одинаково. Костя составил из кубиков столбик и смотрит на него с четырёх сторон. Может ли он сделать это таким образом, чтобы с каждой стороны все шесть граней были разного цвета?

5. По кругу в каком-то порядке выписаны числа от 1 до 77. Какова минимально возможная сумма модулей разностей между соседними числами?

6. На продажу выставлены 20 книг по цене от 7 до 10 евро и 20 обложек по цене от 10 центов до 1 евро, причём все цены разные. Смогут ли Том и Леопольд купить по книге с обложкой, заплатив одну и ту же сумму денег?

Международная математическая олимпиада
«Формула Единства» / «Третье тысячелетие»
2013/2014 год

Задачи 1 тура, 8 класс

1. В стопке лежат одинаковые карточки, на которых записаны числа от 1 до 12. Билл взял одну карточку и тайно отметил на ней 4 числа. Марк может сделать то же самое с несколькими карточками. Затем карточки открывают. Если на одной из карточек Марка хотя бы два из четырёх отмеченных чисел совпадут с числами Билла, то Марк выигрывает. Какое наименьшее число карточек должен взять Марк и как их заполнить, чтобы наверняка выиграть?

2. Дан прямоугольник $ABCD$. На луче DC отложен отрезок DK, равный BD. Точка M — середина отрезка BK. Докажите, что AM — биссектриса угла BAC.

3. У фокусника есть два комплекта по 8 карточек. На розовых карточках записаны целые числа от 0 до 7. На первой голубой карточке написано 1, а число на каждой следующей голубой карточке в 8 раз больше предыдущего. Фокусник раскладывает карточки попарно (розовую с голубой). Затем зрители перемножают числа в каждой паре и находят сумму всех 8 произведений. Фокус состоит в том, что в сумме должно получиться простое число. Подскажите фокуснику, какие карточки можно для этого объединить в пары (или докажите, что у него ничего не получится).

4. На плоскости нарисовали 5 красных точек. Все середины отрезков между ними отметили синим цветом. Расположите красные точки так, чтобы синих точек было минимально возможное количество. (Точка может оказаться красной и синей одновременно.)

5. По кругу в каком-то порядке выписаны числа от 1 до 88. Какова минимально возможная сумма модулей разностей между соседними числами?

6. На продажу выставлены 20 книг по цене от 7 до 10 евро и 20 обложек по цене от 10 центов до 1 евро, причём все цены разные. Смогут ли Том и Леопольд купить по книге с обложкой, заплатив одну и ту же сумму денег?

Международная математическая олимпиада
«Формула Единства» / «Третье тысячелетие»
2013/2014 год

Задачи 1 тура, 9 класс

1. В стопке лежат одинаковые карточки, на которых записаны числа от 1 до 33. Билл взял одну карточку и тайно отметил на ней 10 чисел. Марк может сделать то же самое с несколькими карточками. Затем карточки открывают. Если на одной из карточек Марка хотя бы три из десяти отмеченных чисел совпадут с числами Билла, то Марк выигрывает. Какое наименьшее число карточек должен взять Марк и как их заполнить, чтобы наверняка выиграть?

2. Дан прямоугольник $ABCD$. На луче DC отложен отрезок DK, равный BD. Точка M — середина отрезка BK. Докажите, что AM — биссектриса угла BAC.

3. Назовём основание системы счисления комфортным, если существует простое число, запись которого в этой системе счисления ровно по одному разу содержит каждую из её цифр. Например, 3 — комфортное основание, так как троичное число 102 — простое. Найдите все комфортные основания, не превосходящие 10.

4. На плоскости нарисовали 5 красных точек, никакие три из которых не лежат на одной прямой. Все середины отрезков между ними отметили синим цветом. Расположите красные точки так, чтобы синих точек было минимально возможное количество.

5. По кругу в каком-то порядке выписаны числа от 1 до 99. Какова минимально возможная сумма модулей разностей между соседними числами?

6. Решите систему уравнений:

$$\begin{cases} x + y + xy = 11 \\ x^2y + xy^2 = 30 \end{cases}$$

Международная математическая олимпиада «Формула Единства» / «Третье тысячелетие» 2013/2014 год

Задачи 1 тура, 10 класс

1. Назовём год лихим, если в записи его номера есть одинаковые цифры. Например, все годы с 1988 по 2012 были лихими. Докажите, что в каждом столетии, начиная с двадцать первого, хотя бы 44 лихих года.

2. Азимутом называется угол от 0 до 360°, отсчитанный по часовой стрелке от направления на север до направления на нужный ориентир. Алекс видит телебашню под азимутом 60°, водонапорную башню под азимутом 90°, а колокольню под азимутом 120°. Для Бориса те же азимуты соответственно равны 270°, 240° и X. Какие значения может принимать X?

3. Назовём основание системы счисления комфортным, если существует простое число, запись которого в этой системе счисления ровно по одному разу содержит каждую из её цифр. Например, 3 — комфортное основание, так как троичное число 102 — простое. Найдите все комфортные основания, не превосходящие 12.

4. У Кости есть n одинаковых кубиков. У каждого кубика на двух противоположных гранях написаны числа 5 и 6, а на остальных — 1, 2, 3 и 4 (именно в этом порядке по кругу). Костя склеил из этих кубиков столбик — параллелепипед $1 \times 1 \times n$ — и покрыл лаком все шесть граней этого столбика. После этого он расклеил кубики и обнаружил, что сумма чисел на покрытых лаком гранях меньше, чем на остальных. При каком наименьшем n такое могло произойти?

5. CH — высота в треугольнике ABC, а O — центр его описанной окружности. Из точки C опустили перпендикуляр на AO, а его основание обозначили через T. Наконец, через M обозначили точку пересечения HT и BC. Найдите отношение длин отрезков BM и CM.

6. Решите систему уравнений:

$$\begin{cases} x + y + xy = 11 \\ x^2y + xy^2 = 30 \end{cases}$$

Международная математическая олимпиада «Формула Единства» / «Третье тысячелетие» 2013/2014 год

Задачи 1 тура, 11 класс

1. Назовём год лихим, если в записи его номера есть одинаковые цифры. Например, все годы с 1988 по 2012 были лихими. Докажите, что в каждом столетии, начиная с двадцать первого, хотя бы 44 лихих года.

2. Для исследования подводного мира соорудили прямолинейную штангу, уходящую под углом 45° к поверхности воды на глубину 100 метров. Водолаз связан со штангой гибким тросом, позволяющим ему удаляться от любой точки штанги на расстояние не более 10 метров. Считая размеры водолаза нулевыми (точечными), найдите объём доступной ему части подводного пространства. Дайте точный ответ и округлите его до ближайшего целого значения в кубических метрах.

3. Назовём основание системы счисления комфортным, если существует простое число, запись которого в этой системе счисления ровно по одному разу содержит каждую из её цифр. Например, 3 — комфортное основание, так как троичное число 102 — простое. Найдите все комфортные основания.

4. У Кости есть n одинаковых кубиков. У каждого кубика на двух противоположных гранях написаны числа 5 и 6, а на остальных — 1, 2, 3 и 4 (именно в этом порядке по кругу). Костя склеил из этих кубиков столбик — параллелепипед $1 \times 1 \times n$ — и покрыл лаком все шесть граней этого столбика. После этого он расклеил кубики и обнаружил, что сумма чисел на покрытых лаком гранях меньше, чем на остальных. При каком наименьшем n такое могло произойти?

5. CH — высота в треугольнике ABC, а O — центр его описанной окружности. Из точки C опустили перпендикуляр на AO, а его основание обозначили через T. Наконец, через M обозначили точку пересечения HT и BC. Найдите отношение длин отрезков BM и CM.

6. Пусть $p_1, ..., p_n$ — различные простые числа. Пусть S — сумма всевозможных произведений четного (ненулевого) количества различных простых из этого набора. Докажите, что $S + 1$ делится на 2^{n-2}.