1. Розв'язати рівняння $\frac{2\cos x+1}{\sqrt{27-6x-x^2}} = 0$.

$2\cos x = -1$

$\cos x = -\frac{1}{2}$

$x = \pm\frac{\pi}{3} + \pi + 2\pi k$

$x = -2\frac{2}{3}\pi;\ -\frac{4}{3}\pi;\ -\frac{2}{3}\pi;\ \frac{2}{3}\pi$

ОДЗ:

$x^2+6x-27<0$

$(x+9)(x-3)<0$

$x \in (\cancel{9};3)$

$x \in (-9;3)$

Ответ: $-\frac{8}{3}\pi;\ -\frac{4}{3}\pi;\ -\frac{2}{3}\pi;\ \frac{2}{3}\pi$

ОДЗ: $\sqrt{27-6x-x^2} > 0$ (знак строгий, бо в знаменнику)

$27-6x-x^2>0$

$x^2+6x-27<0$

$(x+9)(x-3)<0$

$x\in(-9;3)$ ← ОДЗ

$2\cos x+1=0$

$\cos x = -\frac{1}{2}$

$$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} x = \frac{2\pi}{3}+2\pi n \\ x = -\frac{2\pi}{3}+2\pi n \end{array}\right., n\in\mathbb{Z} \\ x\in(-9;3) \end{cases} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x=\left\{-\frac{4\pi}{3}; \frac{2\pi}{3}\right\} \\ x=\left\{-\frac{8\pi}{3}; -\frac{2\pi}{3}\right\} \end{array}\right. \Rightarrow \text{В.}: x=\left\{-\frac{8\pi}{3}; -\frac{4\pi}{3}; -\frac{2\pi}{3}; \frac{2\pi}{3}\right\}$$

$\frac{2\cos x+1}{\sqrt{27-6x-x^2}} = 0$

$\begin{cases} 2\cos x+1=0 \\ \sqrt{27-6x-x^2}\neq 0 \end{cases}$ $\begin{cases} 2\cos x = -1 \\ 27-6x-x^2\neq 0 \end{cases}$

$\cos x = -\frac{1}{2}$

$x = \pm\arccos\left(-\frac{1}{2}\right)+2\pi n$

$x = \mp\frac{\pi}{3}+2\pi n$

Відповідь: $\pm\frac{\pi}{3}+2\pi n$

$27-6x-x^2\neq 0$

$x^2+6x-27\neq 0$

$D = 36-4\cdot 27<0$

коренів немає

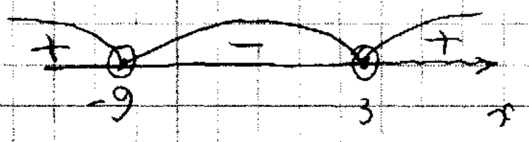
~~$27-6x-x^2<0$ при любих x~~

1) ОДЗ: $27-6x-x^2>0;$

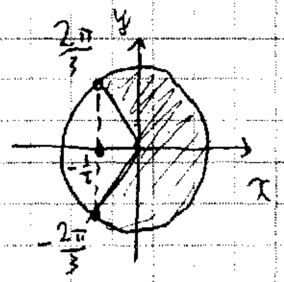
$x^2+6x-27<0;$

$D=36+4\cdot 27=12^2;$

$x_{1,2}=\frac{-6\pm 12}{2}$, $\left[\begin{array}{l}x_1=3\\ x_2=-9\end{array}\right.$



Отже, $x\in(-9;3)$



$2\cos x+1=0;$

$\cos x=-\frac{1}{2};$

$x=\pm\frac{2\pi}{3}+2\pi n, n\in\mathbb{Z}$

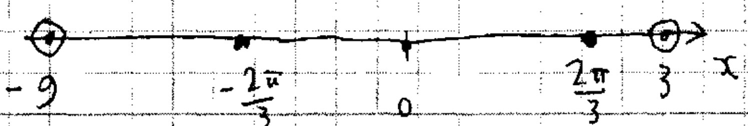
$x\in(-9;3)$

$\frac{2\pi}{3}\approx 2{,}71$

$-\frac{2\pi}{3}-2\pi=-\left(\frac{2\pi+6\pi}{3}\right)=$

$=-\frac{8\pi}{3}=-4\cdot\frac{2\pi}{3}\approx$

$\approx\ldots<-9.$

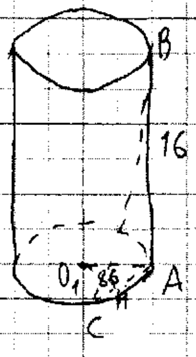


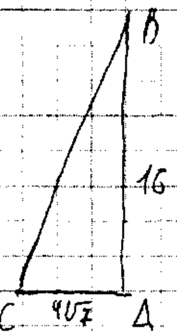
Отже, проміжку ОДЗ належать лише корені $x_1=\frac{2\pi}{3}$ і $x_2=-\frac{2\pi}{3}$.

Відповідь: $-\frac{2\pi}{3}$; $\frac{2\pi}{3}$.

2. Радіус основи та висота циліндра дорівнюють відповідно 8 см і 16 см. Через дві точки, які лежать на колах різних основ циліндра проведено пряму, яка знаходиться на відстані 6 см від осі циліндра. Знайти кут, який утворює ця пряма з віссю циліндра.

$64-36=4\cdot 7$



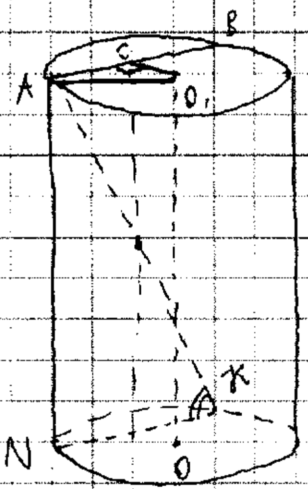


Нехай AB – висота циліндра, BC – дана пряма.

Спроектуємо BC на площину основи циліндру. AC – проекція.

$\rho(AC; O_1) = 6$. Нехай $O_1H \perp AC$. Тоді $AC = 2\sqrt{64-36} = 4\sqrt{7}$.

Кут між віссю циліндра і прямою BC буде дор. куту між прямою BC і проекцією ~~[illegible]~~ осі циліндра на площ. ABC. Ця проекція буде паралельна прямій AB і тоді необхідно знайти кут між AB і BC. З $\triangle CBA$: $tg\angle CBA = \frac{\sqrt{7}}{4} \Rightarrow \angle CBA = arctg\frac{\sqrt{7}}{4}$



Дано: $OO_1 = 16$ см

$O_1A = r = 8$ см

~~$O_1C = 6$ см~~

$\rho(OO_1; AK) = 6$ см

Знайти: $(OO_1 \widehat{;} AK)$ - ?

Розв'язання:

Прямі є мимобіжними, отже ρ – відстань від OO_1 до площини, що містить AK;

Проведемо площину, що містить AK = / ‖ KN та AK.

Тоді ρ – перпендикуляр від будь-якої точки OO_1 до AB => $O_1C = \rho$.

З $\triangle O_1CA$, $\angle C = 90°$: $AC = \sqrt{O_1A^2 - O_1C^2}$ – з теор. Піфагора

~~AC... З правила золотого прямокутника: AC =~~

$AC = \sqrt{64 - 36} = \sqrt{28} = 2\sqrt{7}$ (см)

=> $AB = 2AC = 4\sqrt{7}$ (см)

Оскільки $AN \parallel OO_1$, то кутом $(OO_1 \widehat{;} AK)$ буде $\angle AKN$.

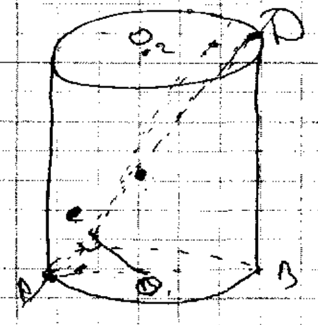
З $\triangle ANK$, $\angle N = 90°$:

$tg\angle K = \frac{AN}{KN}$; $tg\angle K = \frac{16}{4\sqrt{7}} = \frac{4\sqrt{7}}{7}$;

Отже, $(OO_1 \widehat{;} AK) = arctg\frac{4\sqrt{7}}{7}$.

Відповідь: $arctg\frac{4\sqrt{7}}{7}$.

$R = 8 \quad h = 16 \qquad \angle DAB - ?$



AC відстань від осі циліндра — це перпендикуляр до прямої.

$\angle ACO_1 = 90°$

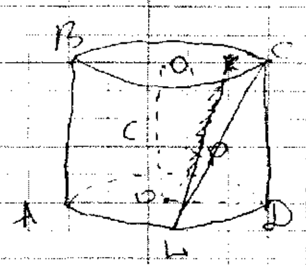
$\triangle ABD \; \begin{cases} \angle ABD = 90° \\ AB = AB \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow \angle DAB = 45°$

$\triangle ACO_1$

$\angle CAO_1 = 45°$
$\angle ACO_1 = 90° \Rightarrow \angle CO_1A = 45°$

Кут між прямою та віссю циліндра $= \angle DAB = 45°$



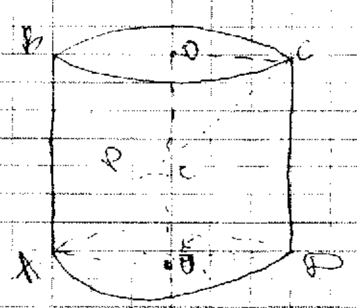
Дано:

$R = 8$ см $= OD$

$H = 16$ см $= CD$

$PC = 6$ см

CL — задана пряма



$OC = R = 8$ см

$OO_1 = H = 16$ см

AC задана пряма

$PC = 6$ см

$\vec{AC} \cdot \vec{PC} = 0 \quad i \quad \vec{OO_1} \cdot \vec{PC} = 0$

$\vec{AC} \cdot \vec{OO_1} = |\vec{AC}| \cdot |\vec{OO_1}| \cdot \cos\alpha$

$(AC) \div (OO_1)$ $\quad$ AD — проекція AC на основу циліндра

$\triangle AO_1D$ — рівнобедр. $(AO_1 = O_1D)$. $\; OK \perp AD \Rightarrow$

OK — висота, медіана $\Rightarrow AK = KD \quad \triangle O_1KD: \; KD = \sqrt{O_1D^2 - O_1K^2} =$

$= \sqrt{64 - 36} = \sqrt{28} = 2\sqrt{7} \Rightarrow AD = 2KD = 4\sqrt{7}$

$\triangle ACD$ — прямок. $\Rightarrow AC = \sqrt{CD^2 + AD^2} = \sqrt{256 + 16 \cdot 7} =$

$= 16 \cdot \sqrt{16 + 7} = 16 \cdot \sqrt{23}$

$\cos\alpha = \dfrac{\vec{AC} \cdot \vec{OO}}{|\vec{AC}|\,|\vec{OO_1}|} = \dfrac{\vec{AC} \cdot \vec{OO}}{16\sqrt{23} \cdot 16}$

3. Знайдіть значення параметра a, при якому корінь рівняння $\lg(sin5\pi x) = \sqrt{16 + a - x}$ належить проміжку $\left(\frac{3}{2}; 2\right)$.

~~$lg(sin5\pi x)$~~ $\sin 5\pi x \le 1 \Rightarrow lg(\sin 5\pi x) \le 0$

$\sqrt{16+a-x} \geq 0 \Rightarrow lg(\sin 5\pi x) = \sqrt{16+a-x} = 0$

$\sin 5\pi x = 1$, $x - a = 16$

$5\pi x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k$ $\quad a = x - 16$

$x = \frac{1}{10} + \frac{2}{5}k$

на проміжку $(\frac{3}{2}; 2)$ x може дорівнювати лише 1,7, тоді а має дор. -14,3.

ОДЗ:

~~$\sin(5\pi x) \in [-1; 1]$~~

~~Але, оскільки~~

$\begin{cases} lg(\sin 5\pi x) \\ \sin 5\pi x \in [-1; 1] \end{cases} \Rightarrow \sin(5\pi x) \in (0; 1] \Rightarrow$

$\Rightarrow lg(\sin x) \le 0$ (основа $= 10 > 1$)

Але справа кореня, вміст ≥ 0. Отже $\Rightarrow$

$\Rightarrow lg(\sin 5\pi x) = 0$ $\qquad 16 + a - x = 0$

$\qquad x = 16 + a$

$\sin(5\pi x) = 1$ $\qquad$ Оскільки $x \in (\frac{3}{2}; 2) \Rightarrow a \in (-\frac{29}{2}; -14)$

$\sin(5\pi(16+a)) = 1$

$\sin(80\pi + 5\pi a) = 1$

$\sin(5\pi a) = 1$

$5\pi a = \frac{\pi}{2} + 2\pi n$

$\begin{cases} a = \frac{1}{10} + \frac{4n}{10} = \frac{1+4n}{10}, n \in \mathbb{Z} \\ a \in (-\frac{29}{2}; -14) \end{cases} \Rightarrow$ ~~$n = -36$~~ $n = -36 \Rightarrow a = -14,3$.

Перевірка: $x = 16 + a = 16 - 14,3 = 1,7$.

$lg(\sin(\frac{5\pi \cdot 17}{10})) = lg(\sin(8,5\pi)) = lg(\sin(8\pi + \frac{\pi}{2})) = lg(\sin(\frac{\pi}{2})) = lg(1) = 0$

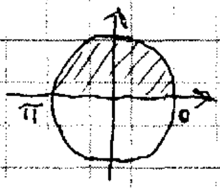
~~$\sqrt{16+14,3-1,7} = 0$~~ Перевірку ~~задовільнено~~.

В.: $a = -14,3$.

1) ОДЗ: $\sin 5x\pi > 0$;

Заміна: $5x\pi = t$;

$\sin t > 0$



$t \in (2\pi n; \pi + 2\pi n),\ n \in \mathbb{Z}$

$5x \in (2n; 1 + 2n),\ n \in \mathbb{Z}$;

$x \in \left(\frac{2n}{5}; \frac{1}{5} + \frac{2n}{5}\right),\ n \in \mathbb{Z}$.

$16 + a - x \geq 0$;

$x - a - 16 \leq 0$;

$D = a^2 + 64, \quad x_{1,2} = \frac{a \pm \sqrt{a^2 + 64}}{2}$;

Отже, $x \in \left[\frac{a - \sqrt{a^2+64}}{2}; \frac{a + \sqrt{a^2+64}}{2}\right]$.

Візьмемо квадрат обох частин рівняння:

$\lg \sin^2 5\pi x = 16 + a - x$;

Пропотенціюємо рівняння по 10:

$10^{\lg \sin^2 5\pi x} = 10^{16 + a - x}$;

$\sin^2 5\pi x = 10^{16 + a - x}$; (і ліва, і права частини ≥ 0)

$\sin 5\pi x = 10^{8 + \frac{a}{2} - \frac{x}{2}}$

$\lg(\sin 5\pi x) = \lg 10^{\sqrt{16 + a - x}}$;

$\sin 5\pi x = 10^{\sqrt{16 + a - x}}$;

$\sin 5\pi x = \frac{3}{2}$; [illegible]

$\cancel{\lg \sin^2 5x\pi = 16 + a - x,}$

$\cancel{a = \lg \sin^2 5\pi x + x - 16;}$

Ліва частина завжди ≥ 0;

$\sin 5\pi x$ завжди ≤ 0

Тоді $\begin{cases} \lg(\sin 5x\pi) = 0; \\ \sqrt{16 + a - x} = 0, \end{cases}$

$\begin{cases} \sin 5x\pi = 1 & (1) \\ 16 + a - x = 0 & (2) \end{cases}$

(1): $5x\pi = \frac{\pi}{2} + 2\pi n;$

$$\begin{cases} x = \frac{1}{10} + \frac{2n}{5}, \; n \in \mathbb{Z}. \\ x = 16 + a; \\ x \in \left(\frac{2n}{5}; \frac{1}{5} + \frac{2n}{5}\right), \; n \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$\cancel{16 + a = \frac{1}{10} + \frac{2n}{5}.}$

$\cancel{a = -\frac{159}{10} + \frac{2n}{5}, \; n \in \mathbb{Z}.}$

$\cancel{a = x - 16}$ $\quad x \in_1 \frac{a - \sqrt{a^2 + 64}}{2} = \frac{x - 16 - \sqrt{x^2 - 32x + 256 + 64}}{2} =$

$= \frac{x - 16 - \sqrt{x^2 - 32x + 320}}{2}$ *