Тренінг 2

Розв'язки.

1. Розв'язати рівняння $\frac{2cosx+1}{\sqrt{27-6x-x^2}} = 0$.

Дане рівняння рівносильно системі $\begin{cases} 2cosx + 1 = 0, \\ 27 - 6x - x^2 > 0. \end{cases}$ Далі також маємо ланцюжок рівносильних перетворень: $\begin{cases} cosx = -\frac{1}{2}, \\ x^2 + 6x - 27 < 0; \end{cases} \Leftrightarrow$

$\begin{cases} x = \pm arccos\left(-\frac{1}{2}\right) + 2\pi n, n\epsilon Z, \\ (x+9)(x-3) < 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pm\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) + 2\pi n, n\epsilon Z, \\ x\epsilon(-9;3); \end{cases} \Leftrightarrow$

$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} x=\frac{2\pi}{3}+2\pi n, n\epsilon Z, \\ x=-\frac{2\pi}{3}+2\pi n, n\epsilon Z, \end{array}\right. \\ x\epsilon(-9;3). \end{cases}$

Для розв'язання системи, з'ясуємо, які з чисел, що задовольняють сукупність $\left[\begin{array}{l} x=\frac{2\pi}{3}+2\pi n, n\epsilon Z, \\ x=-\frac{2\pi}{3}+2\pi n, n\epsilon Z, \end{array}\right.$ належать інтервалу $(-9;3)$.

Для цього спочатку знайдемо всі цілі значення n, які задовольняють нерівність $-9 < \frac{2\pi}{3} + 2\pi n < 3$.

Нехай $n = 0$. Тоді, очевидно, що $-9 < \frac{2\pi}{3}$. З того, що $\frac{2\pi}{3} < \frac{2\cdot 3{,}3}{3} < 3$, маємо $x = \frac{2\pi}{3}$ є розв'язком рівняння.

Нехай $n \geq 1$. Тоді $x = \frac{2\pi}{3} + 2\pi n \geq \frac{8\pi}{3} > 8$ не задовольняють умову $x\epsilon(-9;3)$.

Нехай $n = -1$. Тоді $x = \frac{2\pi}{3} - 2\pi = -\frac{4\pi}{3}$. Очевидно, що $-\frac{4\pi}{3} < 3$. Крім того, $-\frac{4\pi}{3} > -\frac{4\cdot 3{,}3}{3} > -9$, отже $x = -\frac{4\pi}{3}$ є розв'язком рівняння.

Нехай $n \leq -2$. Тоді $x = \frac{2\pi}{3} + 2\pi n \leq -\frac{10\pi}{3} < -9$ не задовольняють умову $x\epsilon(-9;3)$.

Знайдемо тепер всі цілі значення n, які задовольняють нерівність

$-9 < -\frac{2\pi}{3} + 2\pi n < 3$.

Нехай $n = 0$. Тоді, очевидно, що $x = -\frac{2\pi}{3} < 3$. З того, що $-9 < -\frac{4\pi}{3} < -\frac{2\pi}{3}$, маємо $x = -\frac{2\pi}{3}$ є розв'язком рівняння.

Нехай $n \geq 1$. Тоді $x = -\frac{2\pi}{3} + 2\pi n \geq \frac{4\pi}{3} > 3$ не задовольняють умову задачі.

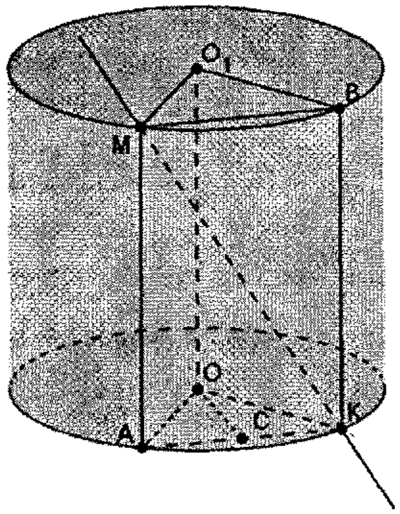
Нехай $n = -1$. Тоді $x = -\frac{2\pi}{3} - 2\pi = -\frac{8\pi}{3}$. Очевидно, що $-\frac{8\pi}{3} < 3$. Порівняємо числа $-\frac{8\pi}{3}$ і -9. Для цього порівняємо числа π і $\frac{27}{8}$. З того, що $\pi < 3{,}375$, маємо $8\pi < 27$, отже $\frac{8\pi}{3} < 9$, звідки $-\frac{8\pi}{3} > -9$. Тому $x = -\frac{8\pi}{3}$ є розв'язком рівняння.

Нехай $n \leq -2$. Тоді $x = -\frac{2\pi}{3} + 2\pi n \leq -\frac{14\pi}{3} < -9$ не задовольняють умову задачі.

Відповідь: $x \epsilon \left\{-\frac{8\pi}{3};\ -\frac{4\pi}{3}; -\frac{2\pi}{3}; \frac{2\pi}{3}\right\}$.

<u>Задача 2</u>

Радіус основи та висота циліндра дорівнюють відповідно 8 см і 16 см. Через дві точки, які лежать на колах різних основ циліндра проведено пряму, яка знаходиться на відстані 6 см від осі циліндра. Знайти кут, який утворює ця пряма з віссю циліндра.



Розглянемо циліндр, в якому точки K і M належать колам основ з центрами в точках O і O_1 відповідно, $OO_1 = 16$ см, $OK = O_1M = 8$ см, відстань між прямими OO_1 та MK дорівнює 6 см. Знайдемо кут між прямими OO_1 та MK.

Доведемо, що ***прямі OO_1 та MK є мимобіжними***. Для цього спочатку доведемо, що вказані прямі не можуть бути паралельними. Припустимо, що OO_1 паралельно MK. Якщо через точку M провести твірну циліндра, то за властивістю циліндра вона паралельна OO_1. З того, що через точку поза даною прямою можна провести єдину пряму, паралельну даній, MK є твірною циліндра. Проведемо радіус OK основи. Оскільки твірна MK та пряма OO_1 перпендикулярні площинам основ циліндра, то за означенням перпендикулярності прямої та площини OK перпендикулярно MK та OO_1.

Оскільки точки O і K належать вказаним прямим, то довжина відрізка OK дорівнює відстані між паралельними прямими MK та OO_1. Але, за умовою радіус OK основи кола дорівнює 8 см, а відстань між прямими MK та OO_1 дорівнює 6 см. Одержана суперечність свідчить про те, що прямі MK та OO_1 не можуть бути паралельними. Ці прямі також не можуть мати спільної точки, оскільки в цьому випадку відстань між ними дорівнювала б нулю. Отже, прямі, які не можуть бути паралельними та не можуть перетинатись, є мимобіжними.

Побудуємо **відрізок, довжина якого дорівнює довжині спільного перпендикулярі мимобіжних прямих OO_1 *та* MK.** Через точки K і M проведемо твірні MA і BK циліндра. За властивістю циліндра твірні MA і BK паралельні, тому за означенням паралельних прямих лежать в одній площині. Оскільки точки K і M належать цій площині, то за однією з аксіом стереометрії пряма MK також належить цій площині. З того, що OO_1 паралельна MA, маємо, що пряма OO_1 паралельна площині (AMK) за ознакою паралельності прямої та площини. Як відомо, *якщо одна з двох мимобіжних прямих належить площині, а інша пряма паралельна цій площині, то відстань між мимобіжними прямими дорівнює відстані між паралельними прямою та площиною*. Побудуємо перпендикуляр з точки O до площини (AMK). Для цього в площині (AOK) проведемо OC перпендикулярно AK. За властивістю циліндра, твірна MA перпендикулярна площині основи (AOK), OC міститься в площині (AOK), тому за означенням перпендикулярності прямої та площини, MA перпендикулярна OC. Тоді, за означенням перпендикулярності прямої та площини OC перпендикулярно (AMK), тому довжина відрізка OC дорівнює відстані між прямою OO_1 та площиною (AMK), а, значить, і відстані між мимобіжними прямими OO_1 та MK. За умовою, $OC = 6$ см.

Як вказано вище, за властивістю циліндра OO_1 паралельно MA, тому **кут між мимобіжними прямими OO_1 і MK** дорівнює куту AMK.

З прямокутного трикутника AOC за теоремою Піфагора маємо:

$AC = \sqrt{OA^2 + OC^2}$, отже $AC = \sqrt{OA^2 + OC^2} = \sqrt{8^2 - 6^2} = 2\sqrt{7}$ (см).

Оскільки відрізки OA і OK рівні, як радіуси кола, то висота OC до основи рівнобедреного трикутника AOK є також і медіаною, тому

$AC = CK = 2\sqrt{7}$ (см), звідки $AK = 4\sqrt{7}$ (см).

З прямокутного трикутника AMK маємо:

$$tg\angle AMK = \frac{AK}{AM} = \frac{AK}{OO_1} = \frac{16}{4\sqrt{7}},$$

$$tg\angle AMK = \frac{4\sqrt{7}}{7}.$$

З того, що кут AMK є гострим, маємо: $\angle AMK = arctg\frac{4\sqrt{7}}{7}$.

Відповідь: $\angle AMK = arctg\frac{4\sqrt{7}}{7}$.

Задача 3

Знайдіть значення параметра a, при якому корінь рівняння

$$\lg(sin5\pi x) = \sqrt{16 + a - x}$$

належить проміжку $\left(\frac{3}{2}; 2\right)$.

Нехай $f(x) = lg(sin5\pi x)$, $g(x) = \sqrt{16 + a - x}$. Тоді з того, що для будь-якого дійсного x маємо $sin5\pi x \leq 1$ та функція $y = lgt$ є зростаючою на області визначення випливає, що $lg(sin5\pi x) \leq lg1$, тобто $\lg(sin5\pi x) \leq 0$ для всіх значень x з області визначення функції $f(x)$. З іншого боку, для всіх значень x з області визначення функції $g(x)$ маємо: $\sqrt{16 + a - x} \geq 0$. Отже, дане рівняння рівносильно системі рівнянь:

$$\begin{cases} lg(sin5\pi x) = 0, \\ \sqrt{16 + a - x} = 0. \end{cases}$$

Маємо ланцюжок рівносильних перетворень:

$$\begin{cases} sin5\pi x = 1, \\ 16 + a - x = 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5\pi x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, n\epsilon Z, \\ a = x - 16; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{10} + \frac{2n}{5}, n\epsilon Z, \\ a = x - 16. \end{cases}$$

За умовою задачі корінь рівняння $x\epsilon \left(\frac{3}{2}; 2\right)$, тому знайдемо, при яких цілих значеннях n число $\frac{1}{10} + \frac{2n}{5}$ належить інтервалу $\left(\frac{3}{2}; 2\right)$. Для цього розв'яжемо систему:

$$\begin{cases} \frac{1}{10} + \frac{2n}{5} > \frac{3}{2}, \\ \frac{1}{10} + \frac{2n}{5} < 2, \\ n\epsilon Z; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n > \frac{7}{2}, \\ n < \frac{19}{4}, \\ n\epsilon Z; \end{cases} \Leftrightarrow n = 4.$$

Тоді $x = \frac{1}{10} + \frac{8}{5}$, тобто $x = 1{,}7$, отже $a = 1{,}7 - 16 = -14{,}3$.

Відповідь: $a = -14{,}3$.

Критерії оцінювання

Задача № 1 (*максимальна кількість балів* – **4**)

1. Знайдена область допустимих значень – **1** б.
2. Знайдена множина розв'язків рівняння $\cos x = -\frac{1}{2}$ – **1** б.
3. Обгрунтований відбір коренів – **1** б.
4. Остаточна правильна відповідь – **1** б.

Задача № 2 (*максимальна кількість балів* – **4**)

1. Обгрунтований той факт, що задана пряма та вісь циліндру мимобіжні – **1** б.
2. Обгрунтувана побудова відрізку, що дорівнює відстані між заданими прямими – **1** б.
3. Обгрунтована побудова кута, що дорівнює шуканому куту – **1** б.
4. Знаходження величини кута та правильна відповідь – **1** б.

Задача № 3 (*максимальна кількість балів* – **4**)

1. Обгрунтування того факту, що якщо x є коренем рівняння, то $\sin 5\pi x = 1$ – **1** б.
2. Знаходження всіх розв'язків рівняння $\sin 5\pi x = 1$ – **1** б.
3. Обгрунтований відбір з множини розв'язків коренів, що належать $\left(\frac{3}{2};2\right)$ – **1** б.

Знаходження шуканого параметру та правильна відповідь – **1** б.